Deuxième bac sciences PC /SVT /ST

Sujets des examens nationaux : Calcul d’intégrales

Deuxième bac sciences PC /SVT /ST

Correction des examens nationaux : Calcul d’intégrales

- **De 2024 à 2015 session normale et rattrapage**

admin

Prof fayssal 0681399067 www.elboutkhili.jimdofree.com

Exercice 01 (Examen 2024-Session-Normal)

Soient les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$

1) Tracer dans un même repère les courbes $(\mathcal{C}_u)$ et $(\mathcal{C}_v)$ des fonctions u et v

2) Justifier graphiquement que $e^x - x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

3) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_u)$, la courbe $(\mathcal{C}_v)$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Exercice 02 (Examen 2024-Session-Rattrapage)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^x)$.

Soit (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit λ un réel strictement positif.

1) Vérifier que : $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$, pour tout $x \in$ R

2) Montrer que: $\int_0^{\lambda} \frac{1}{e^x+1}\, dx = \ln(2) - \ln\left(1 + e^{\lambda}\right)$

3) Montrer que: $\int_0^{\lambda} f(x)\, dx = \ln(2) - f(\lambda) + \int_0^{\lambda} \frac{1}{e^x+1} dx$.

(Remarquer $f(x) = \frac{1}{e^x+1} - f'(x)$)

5) Déduire en fonction de λ, l'aire $\mathcal{A}_\lambda$ da la partie du plan délimitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

5) Calculer $\lim_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}_\lambda$.

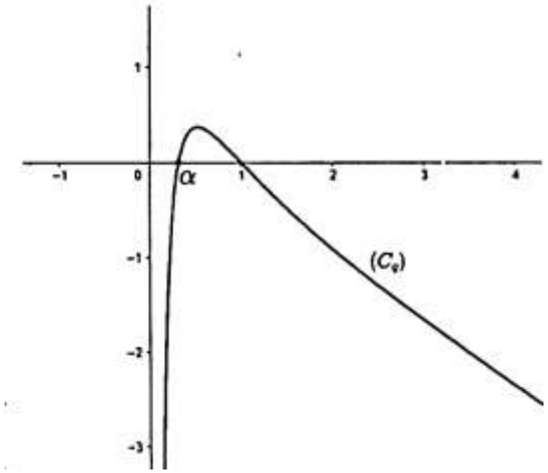
Exercice 03 (Examen 2023-Session-Normal)

Soit f la fonction numérique définit sur $]0, +\infty[$ par

$f(x) = 2 - \frac{2}{x} + (1 - \ln x)^2$

Et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ $(unité : 1cm)$

1)La courbe $(\mathcal{C}_g)$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction $g: x \mapsto f(x) - x$ et qui s'annule en α et 1 ($\alpha \approx 0,3$)



Soit (Δ) la droite d'équation y=x

a) A partir de la courbe $(\mathcal{C}_g)$, déterminer le signe de la fonction g sur $]0, +\infty[$

b) Déduire que la droite (Δ) est en dessous de $(\mathcal{C})$ sur l'intervalle$[\alpha; 1]$ et au-dessus de $(\mathcal{C})$ sur les intervalles $]0, \alpha[et\ \ [1; +\infty[$

2)a) Vérifier que : $x \mapsto 2x - x ln(x)$ est une primitive de : $x \mapsto 1 - ln(x)$ sur $[1; \alpha]$

b) Par une intégrale par partie montrer que

$\int_{\alpha}^{1} (1 - \ln x)^2\, dx = 5(1 - \alpha) + \alpha(4 - ln\alpha) ln\, \alpha$

c) En déduire en fonction de α l'air du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$ et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 1$

Exercice 04 (Examen 2023-Session-Rattrapage)

Soit f une fonction définit sur $]2;3]$ par :

$f(x) = 1 + (x-2)^2 \ln(x-2)$

(C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité 1cm

Soit $\alpha \in]2;3]$

a) Par une intégrale par partie montrer que :

$$\int_{\alpha}^{3} (x-2)^2 \ln(x-2)dx = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}(\alpha-2)^3\left(\frac{1}{3} - \ln(\alpha-2)\right)$$

b)En déduire en fonction de α l'aire $A(\alpha)$ du domaine délimité par la courbe (C) les droites d'équations $y = 1$; $x = \alpha$ et $x = 3$

c)Calculer $\lim_{x\to 2^+} A(\alpha)$

Exercice 05 (Examen 2022-Session-Normal)

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x+1)e^x$

a. Vérifier que $x \mapsto xe^x$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$; puis calculer $I = \int_{-1}^{0} h(x)dx$

b. A l'aide d'une intégration par parties calculer $J = \int_{-1}^{0}(x+1)^2 e^x dx$

Exercice 06 (Examen 2022-Session-Rattrapage)

f la fonction définit sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x^4(\ln x - 1)^2 \ ; \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1)On pose $I = \int_1^e x^4(\ln x - 1)\,dx$, en utilisant une intégrale par partie , montrer que $I = \frac{6-e^5}{25}$

2)Soit la fonction h définit sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = x^5(\ln x - 1)^2$

a) Vérifier que $h'(x) = 5f(x) + 2x^4(\ln x - 1)$

b) Déduire que $\int_1^e f(x)\,dx = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}I$

c) Calculer l'air du domaine délimité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ $(unité : 1cm)$

Exercice 07 (Examen 2019-Session-Normal)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par ;

$f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

Et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm).

1. a) Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$,
$f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$ et déduire la position relative de (C) et (Δ)

2. a) Montrer que la fonction $H : x \mapsto \ln x - x$ est une primitive de $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0;+\infty[$.

b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$.

c) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) et (Δ) les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 08(Examen 2019-Session-Rattrapage)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$f(x) = 2 + 8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}$

Et (C) sa courbe représentative dans un repére orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité :1 cm)

a) Vérifier que la fonction $H: x \to \frac{1}{x}e^{x-4}$ est une fonction primitive de la fonction $h: x \to \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ sur $[2,4]$

b) Vérifier que $f(x) = 2 + 8e^{x-4} - 32\frac{(x-1)}{x^2}e^{x-4}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$

c)Calculer l'intégrale $\int_2^4 e^{x-4}dx$

d)Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (C) l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$

Exercice 09 (Examen 2018-Session-Normal)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$
Et (C) sa courbe représentative dans un repére orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité :1 cm)

1) Montrer que (Cf) est en dessous de la droite $(D); y = x$ sur l'intervalle $[0,1]$

2)Monter que la fonction $H: x \to (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ est une primitive de la fonction $h: x \to -x^2e^{-x}$ sur $[0,1]$

3) Déduire que : $\int_0^1 x^2e^{-x}dx = \frac{2e-5}{e}$

4) Par intégration par parties , montrer que $\int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{e-2}{e}$

5) Déduire l'aire du domaine délimité par (Cf), la droite (D) et les droites d'équations x=0 et x=1

Exercice 10 (Examen 2018-Session-Rattrapage)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$f(x) = x + (1 - \frac{2}{x}) \ln(x)$

Et (C) sa courbe représentative dans un repére orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité :1 cm)

1) Montrer que (Cf) la courbe de f est en dessous de la droite $(D); y = x$ sur l'intervalle $[1,2]$

2) Par intégration par parties ,montrer que

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right) lnx\, dx = (1 - ln2)^2$$

3) Déduire l'aire du domaine plan délimité par (Cf), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ *et* $x = 2$

Exercice 11 (Examen 2017-Session-Normal)

Sit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x + \left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x$

(C_f) Est la courbe de f dans un repère orthonormé d'unité 1cm

1.a. Résoudre dans l'intervalle $]0+\infty[$, l'équation $\left(1 - \frac{2}{x}\right)\ln x = 0$

b. En déduire que la courbe (C_f) coupe la droite (D) en deux points dont on déterminera les coordonnées.

c. Montrer que $f(x) \leq x$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1,2]$

2.a. Montrer que $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

b. Vérifier que $H: x \to 2\ln x - x$ est une primitive de $h: x \to \frac{2}{x} - 1$ sur $]0+\infty[$.

c. Montrer, en utilisant une intégration par parties, que $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)\ln x\, dx = (1 - \ln 2)^2$.

d. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe(C_f), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Exercice 12 (Examen 2016-Session-Normal)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x$

(C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm)$.

1) Soit la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$

Montrer que la courbe (C_f) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]ln(4);+\infty[$ et qu'elle est en-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty; ln(4)[$

2)a) Montrer que $\int_0^{ln(4)} (e^{2x} - 4e^x)\, dx = -\frac{9}{2}$.

b) Calculer, en cm^2 ,l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f),la droite (D),l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = ln(4)$

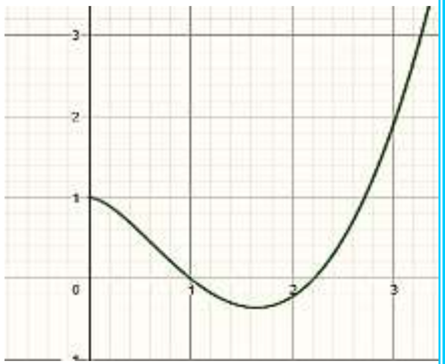
Exercice 13(Examen 2015-Session-Annulé)

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$

et (C_f) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ d'unité 2cm.

Et la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2(1-\ln x)$

(C_g) est la courbe représentative de g dans un repère orthonormé (voir figure)



1) a) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E): $x \in]0,+\infty[$; $g(x) = 0$

b) On donne le tableau de valeurs :

x	$2,1$	$2,2$	$2,3$	$2,4$
$g(x)$	$-0,14$	$-0,02$	$0,12$	$0,28$

Montrer que l'équation (E) admet une solution α telle que $2,2 < \alpha < 2,3$

2)a) Montrer que $f(x) - x = \frac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ pour tout x de D_f .

b) Montrer que la droite (Δ): $y = x$ coupe la courbe (C_f) en deux points d'abscisses 1 et α.

c) A partir de la courbe (Cg), Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[1,\alpha]$ et montrer que $f(x) - x \leq 0$ pour tout x de$[1,\alpha]$

3) a) Montrer que $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1}{x(1-\ln x)} dx = \ln 2$.

b) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (Cf), la droite(Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

Exercice 14 (Examen 2015-Session-Normal)

On considère la fonction numérique f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$$

et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 1cm) .

1)Montrer que $xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x-2x} \leq \frac{1}{e-2}$ pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$

2).a) En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx = 1 - \frac{2}{e}$$

b) Soit, en cm², $A(E)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
Montrer

$$1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$$

Exercice 15 (Examen 2015-Session-Rattrapage)

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - \frac{2Inx}{x}$$

Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm)$.

1) On admet que f est strictement croissante sur $[1;e]$

Montrer que pour tout x dans $[1;e]$ on a $f(x) \geq 0$

a) Montrer que :

$$\int_1^e \frac{2Inx}{x} dx = 1$$

b) Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), $l'axe$ des abscisses et les deux droites d'équations

$x = 1$ et $x = e$.